Chapitre 15. Suites et séries de fonctions

1 Modes de convergence d'une suite de fonctions

X un ensemble non vide et E, F evn.

1.1 Convergence simple

Définition 1.1. Soit $f_n : X \to \mathbb{K}$ et $f : X \to \mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}$)
On dit que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers f si pour tout $x \in X$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ ie.

$$(\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon)$$

f est alors unique et appelée limite simple de $(f_n)_{n\geq 0}$. On écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = f$

1.2 Convergence uniforme

Définition 1.2. Soit $f_n : X \to \mathbb{K}$ $(n \in \mathbb{N})$ et $f : X \to \mathbb{K}$
On dit que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f si $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$ ie.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in X \quad |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$$

f est appelée limite uniforme des f_n

Proposition 1.3. Soit $f_n : X \to \mathbb{K}$ et $f : X \to \mathbb{K}$ ($n \geq 0$)
On suppose qu'il existe $N \geq 0$ et $(\alpha_n)_{n\geq N}$ suite de $\mathbb{R}_+$ avec

1. $\forall x \in X,\ n \in N \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$

Alors $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f

Proposition 1.4. Soit $f_n, g_n : X \to \mathbb{K}$ $(n \geq 0)$
Si (f_n) (resp. (g_n)) converge uniformément vers f (resp. g) alors $(f_n + g_n)$ (resp. λf_n) converge uniformément vers $f + g$ (resp. λf)

1.3 Étude des exemples

Exemple 1 :

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto n^\lambda x e^{-nx} \end{cases} \qquad (n \geq 1,\ \lambda \in \mathbb{R})$$

f_n converge simplement vers 0 et converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ ssi $\lambda < 1$
Si $\lambda > 1$ il y a convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ ($a > 0$)

Exemple 2 :

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-x} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \end{cases}$$

Il y a convergence simple vers $f : x \mapsto e^{-2x}$
Il y a convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$

2 Continuité des limites uniformes

2.1 Caractérisation de la continuité par limite uniforme

Ici X est une partie non vide d'un evn.

Proposition 2.1. Soit $f_n : X \to \mathbb{K}$, $a \in X$ ($n \in \mathbb{N}$)
On suppose :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a
2. $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f

Alors f est continue en a

Corollaire 2.2. Les limites uniformes de fonctions continues sont continues.

2.2 Théorème de la double limite

Théorème 2.3 (Théorème de la double limite ou d'interversion des limites)**.**
Soit $f_n : X \to \mathbb{K}$ avec $X \subset E$, $X \neq \emptyset$, E evn ($n \geq 0$), $a \in E$ adhérent à X
(a peut être dans $\overline{\mathbb{R}}$ si $X \subset \mathbb{R}$) et $f : X \to \mathbb{K}$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = l_n \in \mathbb{K}$
2. $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f

Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{K}$ vers un élément $l \in \mathbb{K}$ et de plus $\lim\limits_{x\to a} f(n) = l$
Autrement dit :

$$l = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

3 Modes de convergence des séries de fonctions

3.1 Convergence simple, absolue, uniforme

Définition 3.1. Soit $f_n : X \to \mathbb{K}$ ($n \geq 0$)
On dit que $\sum f_n$ converge simplement si pour tout $x \in X$, $\sum f_n(x)$ converge.
On note alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

On dit que $\sum f_n$ converge uniformément si $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} f_n$ converge uniformément.

Corollaire 3.2 (Théorème de la double limite)**.**

1. Si les f_n sont $\mathcal{C}^0$ et si $\sum f_n$ converge uniformément alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue.
2. Soit $f_n : X \to \mathbb{K}$ ($X \subset E$, a adhérent à X)
   On suppose :
   - $\sum f_n$ converge uniformément.
   - $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = l_n$

   Alors $\sum l_n$ converge et

$$\boxed{\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} l_n}$$

3.2 Convergence normale

Définition 3.3. Soit $f_n(x) : X \to \mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}$)
On dit que $\sum f_n$ converge normalement si à partir d'un certain rang N les f_n sont bornés et si $\sum\limits_{n \geq N} \|f_n\|_\infty < +\infty$

Proposition 3.4. Si $\sum f_n$ converge normalement sur X alors $\sum f_n$ converge uniformément et absolument sur X

Proposition 3.5. Soit $f_n : X \to \mathbb{K}$ ($n \geq 0$)
On suppose qu'il existe $N \geq 0$ et $(\alpha_n)_{n \geq N}$ suite dans $\mathbb{R}_+$ avec :

1. $\forall n \geq N, \forall x \in X, |f_n(x)| \leq \alpha_n$
2. $\sum \alpha_n$ converge ie. $(\alpha_n)_{n \geq N}$ sommable.

Alors il y a convergence normale de $\sum f_n$

3.3 Cas des séries non normalement convergentes

Dans le cas où la série n'est pas normalement convergente on peut utiliser :

- Le critère spécial des séries alternées.
- La transformation D'Abel.

3.4 Exemples des séries trigonométriques

Définition 3.6. Les séries trigonométriques sont les séries de fonctions

$$x \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

avec $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ suites de $\mathbb{K}$
Ou encore

$$x \mapsto \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx}$$

avec $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ suite de $\mathbb{C}$

4 Intégration et dérivation d'une suite ou série de fonctions

4.1 Interversion limite et intégrale

Théorème 4.1. Soit $f_n : [a, b] \to \mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}$)
On suppose les f_n continues et <u>convergentes uniformément</u> vers f
Alors f est continue et

$$\int_a^b f = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n$$

Autrement dit

$$\boxed{\int_a^b \lim_{n \to +\infty} f_n = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n}$$

Corollaire 4.2. Soit $f_n : [a, b] \to \mathbb{K}$ continues ($n \geq 0$)
Si $\sum f_n$ converge uniformément, on a

$$\boxed{\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n}$$

4.2 Dérivation d'une limite d'une suite de fonctions

Théorème 4.3 (Théorème de dérivation). Soit $f_n : I \to \mathbb{K}$ $\mathcal{C}^1$ ($n \in \mathbb{N}$) avec I intervalle de $\mathbb{R}$
On suppose :

1. $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers $f : I \to \mathbb{K}$
2. $(f'_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction $g : I \to \mathbb{K}$

Alors $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur tout segment de I, f est $\mathcal{C}^1$ et $f' = f$

$$\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to+\infty} f'_n$$

Corollaire 4.4. Soit $f_n : I \to \mathbb{K}$ $(n \in \mathbb{N})$ $\mathcal{C}^k$ avec $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$
On suppose :

1. Pour tout $0 \leq i \leq k-1$, $\left(f_n^{(i)}\right)_{n\geq 0}$ converge simplement vers une fonction g_i
2. $\left(f_n^{(k)}\right)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur tout segments de I vers g_k

On pose $f = g_0 = \lim f_n$, chaque $\left(f_n^{(i)}\right)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur tout segment de I vers g_i
De plus $g_0 = f$ est $\mathcal{C}^k$ et pour $0 \leq i \leq p$, $f^{(i)} = g_i$
Autrement dit

$$\boxed{\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)^{(i)} = \lim_{n\to+\infty} f_n^{(i)}}$$

Corollaire 4.5. Soit $f_n : I \to \mathbb{K}$ $\mathcal{C}^k$ ($n \in \mathbb{N}$)
On suppose :

1. $\forall i \in [\![0, k-1]\!]$, $f_n^{(i)}$ converge simplement.
2. $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I

Alors $\sum f_n^{(i)}$ converge uniformément sur tout segment de I
De plus, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et $\forall i \in [\![0, k]\!]$

$$\boxed{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(i)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(i)}}$$

Corollaire 4.6. Soit $f_n : I \to \mathbb{K}$ $\mathcal{C}^\infty$ ($n \in \mathbb{N}$)
On suppose que pour tout $i \in \mathbb{N}$ $\left(f_n^{(i)}\right)$ converge uniformément sur tout segment de I
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)^{(i)} = \lim_{n\to+\infty} f_n^{(i)}$$

De même, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(i)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(i)}$$

4.3 Extension des résultats aux fonctions vectorielles

On peut tout généraliser aux suite / série de fonctions d'un evn de dimension finie.

5 Exemples d'approximation uniforme

5.1 Approximation des fonctions continues par des fonctions en escalier

Théorème 5.1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ (ou E evn de dim finie) continue par morceaux.
Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $l_n : [a, b] \to \mathbb{K}$ en escalier telle que $\|f - h\|_\infty \leq \varepsilon$
Il existe $(h_n)_{n\geq 0}$ suite de $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ qui converge uniformément vers f

5.2 Théorème de Weierstrass

Théorème 5.2 (Théorème de Weierstrass)**.** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ continue.
Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\|f - P\|_\infty \leq \varepsilon$
Il existe une suite $(P_n)_{n\geq 0}$ de $\mathbb{K}[X]$ qui converge uniformément vers f

5.3 Densité des polynômes trigonométriques

Théorème 5.3 (Théorème de Weierstrass trigonométrique)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ continue 2π-périodique
Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe P polynôme trigonométrique (de période 2π) tel que $\|f - P\| \leq \varepsilon$
Il existe donc une suite de polynômes trigonométrique (P_n) qui converge uniformément vers f

6 Exercices classiques

6.1 Suite des fonctions M-lipschitziennes

1. Soit $f_n : [a, b] \to \mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}$) M-lipschitzienne ($M > 0$) qui converge simplement vers f
   Montrer que f est M-lipschitzienne et que la convergence des f_n est uniforme.
2. Extension : Soit K un compact, $f_n : K \to K$ M-lipschitzienne convergente simplement vers f
   Montrer que la convergence est uniforme.

6.2 Le théorème de Dini (Le prémier)

Soit K un compact, $f_n : K \to \mathbb{R}$ ($n \in N$) continues.
On suppose :

1. $\forall n \in N\ f_n \leq f_{n+1}$
2. $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers f <u>continue</u> sur K

Mq $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f